# Ripasso classi Quarte: Equazioni Goniometriche

Esempi svolti ed esercizi

prof. Diego Fantinelli

September 20, 2024

Matematica per il Liceo Scientifico

# Introduzione alle Equazioni Goniometriche

# Equazioni Goniometriche: Definizione

**Cosa sono le equazioni goniometriche?**

- Un'equazione goniometrica è un'equazione che coinvolge funzioni trigonometriche come sin, cos, tan, cot, sec, e csc.
- Queste equazioni compaiono spesso nello studio dei triangoli e nella modellizzazione di fenomeni periodici (onde, oscillazioni, etc.).
- Le soluzioni delle equazioni goniometriche corrispondono agli angoli che soddisfano l'equazione e si esprimono come multipli del periodo delle funzioni trigonometriche.

**Esempio:**

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ oppure } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

# Relazione con la Circonferenza Goniometrica

## Circonferenza Goniometrica

- La circonferenza goniometrica ha raggio 1 ed è centrata nell'origine del piano cartesiano.
- Gli angoli (in radianti) corrispondono a punti sulla circonferenza, con:
  - Asse $x$: corrisponde al $\cos x$ (ascissa del punto sulla circonferenza).
  - Asse $y$: corrisponde al $\sin x$ (ordinata del punto sulla circonferenza).
- Le equazioni goniometriche possono essere risolte trovando i punti sulla circonferenza goniometrica che corrispondono ai valori richiesti.

# Question time

Qual è, in generale, la differenza sostanziale
tra le soluzione di una equazione e quelle di una disequazione?

# Risposta

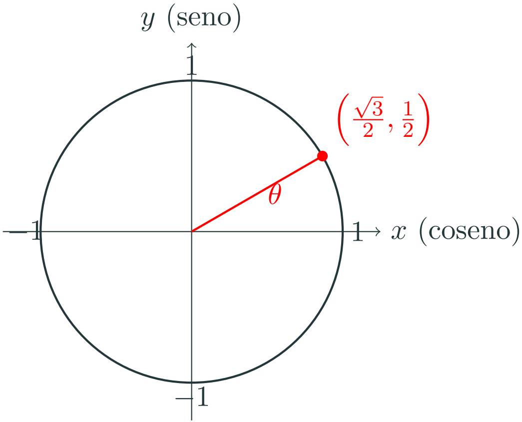
### equazioni goniometriche

Le eventuali soluzioni di una **equazione goniometrica sono rappresentate da** ***punti sulla circonferenza goniometrica.***

### disequazioni goniometriche

Le eventuali soluzioni di una **disequazione goniometrica sono rappresentate da intervalli sulla circonferenza goniometrica, sono quindi degli** ***archi di circonferenza*.**

# la circonferenza goniometrica



# Proprietà delle Funzioni Goniometriche

## Funzioni Goniometriche e la Circonferenza Goniometrica

- **Periodicità**: Tutte le funzioni goniometriche sono periodiche.
  - $\sin x$ e $\cos x$ hanno periodo $2\pi$: $f(x + 2\pi) = f(x)$.
  - $\tan x$ e $\cot x$ hanno periodo $\pi$: $f(x + \pi) = f(x)$.
- **Parità**:
  - $\sin x$ è una funzione dispari: $\sin(-x) = -\sin(x)$.
  - $\cos x$ è una funzione pari: $\cos(-x) = \cos(x)$.
- **Simmetria rispetto alla circonferenza goniometrica**:
  - Gli angoli simmetrici rispetto all'asse $x$ e all'asse $y$ danno valori uguali o opposti di $\sin x$ e $\cos x$.
- **Identità fondamentali**:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{(Identità pitagorica)}$$

# Introduzione alle Equazioni Goniometriche

## Introduzione alle Equazioni Goniometriche

Le equazioni goniometriche sono equazioni che coinvolgono funzioni trigonometriche come seno, coseno e tangente.

- Esempi comuni: $\sin x = 0$, $\cos x = \frac{1}{2}$, $\tan x = 1$
- Risolverle significa trovare gli angoli che soddisfano l'equazione.

# Esempi Svolti

## Esempio 1: $\sin x = 0$

**Equazione:** $\sin x = 0$

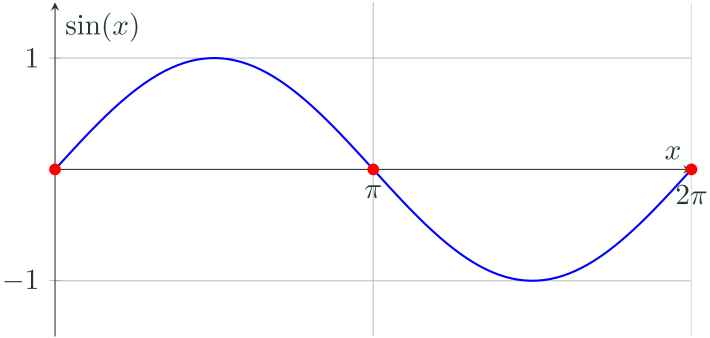
**Soluzione:**

- L'equazione è soddisfatta per $x = 0 + k\pi$ dove $k \in \mathbb{Z}$.
- Soluzione generale: $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

# Esempio grafico: $\sin x = 0$

**Equazione:** $\sin x = 0$

**Soluzione:** $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

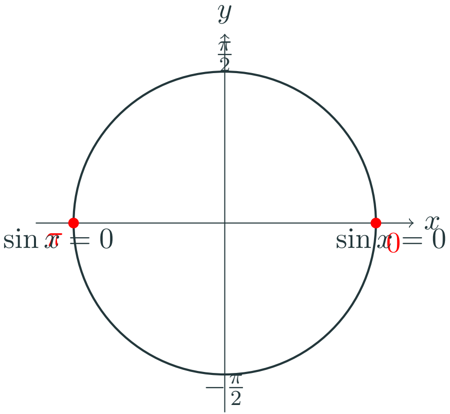



Le soluzioni sono i punti in cui $\sin(x) = 0$, cioè per $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.

# Circonferenza goniometrica: $\sin x = 0$

**Equazione:** $\sin x = 0$

**Soluzione:** $x = 0 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.



# Esempio 2: $\cos x = \frac{1}{2}$

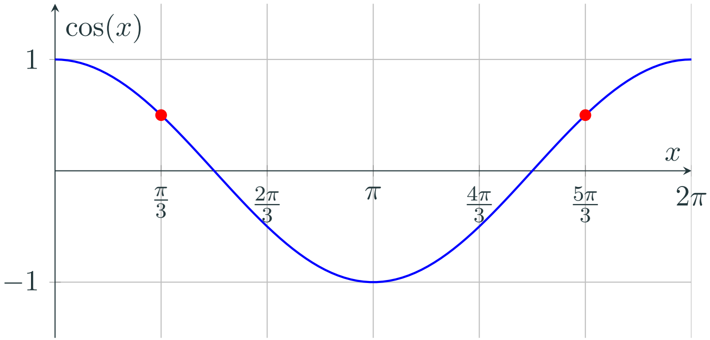
**Equazione:** $\cos x = \frac{1}{2}$
**Soluzione:**

- Si risolve l'equazione trovando gli angoli corrispondenti: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
- Soluzione generale: $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ oppure $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

# Esempio grafico: $\cos x = \frac{1}{2}$

**Equazione:** $\cos x = \frac{1}{2}$

**Soluzione:** $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

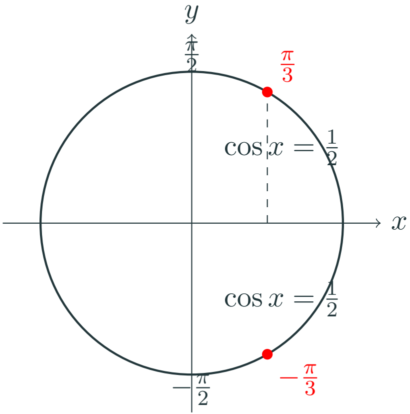



Le soluzioni sono i punti in cui $\cos(x) = \frac{1}{2}$, cioè per $x = \frac{\pi}{3}$ e $x = \frac{5\pi}{3}$.

# Circonferenza goniometrica: $\cos x = \frac{1}{2}$

**Equazione:** $\cos x = \frac{1}{2}$

**Soluzione:** $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.



## Esempio 3: $\tan x = 1$

**Equazione:** $\tan x = 1$

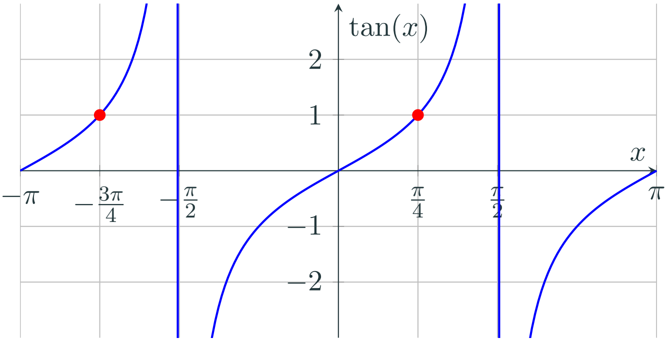
**Soluzione:**

- L'equazione è soddisfatta per $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
- Soluzione generale: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

# Esempio grafico: $\tan x = 1$

**Equazione:** $\tan x = 1$

**Soluzione:** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

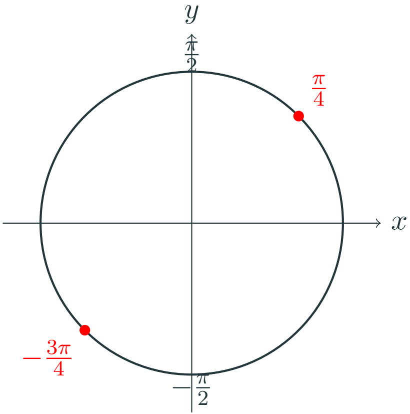



Le soluzioni sono i punti in cui $\tan(x) = 1$, cioè per $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = -\frac{3\pi}{4}$.

# Circonferenza goniometrica: $\tan x = 1$

**Equazione:** $\tan x = 1$

**Soluzione:** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.



# Esempio: Pannelli solari

**ESEMPIO: Pannelli solari**

L'efficienza di un pannello solare dipende dall'angolo $x$ di inclinazione rispetto a un piano orizzontale e da altri parametri legati, per esempio, alla latitudine a cui ci si trova. In un modello semplificato, possiamo studiare l'efficienza di un pannello rivolto a sud con la funzione:

$$c(x) = \sin(ax + b)$$

In una città italiana sono stati calcolati i parametri:

$$a = 0,84 \quad \text{e} \quad b = 64^\circ$$

# Angolo di massima efficienza del pannello solare

**Qual è l'angolo $x$ che dà la massima efficienza in quella città?**

La funzione diventa $e(x) = \sin(0,84x + 64°)$ e ha valore massimo 1 quando $\sin(0,84x + 64°) = 1$. Poniamo $0,84x + 64° = t$ e risolviamo: $\sin t = 1 \rightarrow t = 90° + k360°$.

L'unica soluzione che ci interessa è $t = 90°$. Ricaviamo $x$:

$$0,84x + 64° = 90° \quad \Rightarrow \quad x = \frac{90° - 64°}{0,84} \simeq 31°$$

**L'angolo che dà maggiore efficienza è di circa $31°$.**

# Principali tipologie di equazioni goniometriche

**Equazioni goniometriche elementari**

- **Equazioni del tipo** $\sin(x) = k$
- **Equazioni riconducibili a elementari**

**Equazioni goniometriche complesse**

- **Equazioni lineari in** $\tan(x) = k$
- **Equazioni lineari in seno e coseno** $a \sin x + b \cos x + c = 0, \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ e } b \neq 0$
- **Equazioni omogenee di secondo grado in seno e coseno** $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$
- **Equazioni riconducibili a omogenee di secondo grado in seno e coseno** $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x + d = 0$

## Equazioni lineari in seno e coseno

- **Equazioni lineari:** sono della forma $a \sin x + b \cos x + c = 0$, con $a \neq 0$ e $b \neq 0$.
- **Metodo di risoluzione algebrico**
  - **Caso** $c = 0$: si dividono i membri dell'equazione per $\cos x \neq 0$ e si risolve l'equazione in tangente.
  - **Caso** $c \neq 0$:
    - Si determinano eventuali soluzioni del tipo $x = \pi + 2k\pi$.
    - Si utilizzano le formule parametriche per $x \neq \pi + 2k\pi$:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{e} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

con $t = \tan \frac{x}{2}$, risolvendo l'equazione in $t$.

## Metodo di risoluzione grafico

- Si eseguono le sostituzioni $\sin x = Y$ e $\cos x = X$.
- Si risolve il sistema tra l'equazione della retta $aY + bX + c = 0$ e $X^2 + Y^2 = 1$, equazione della circonferenza goniometrica.
- Le soluzioni del sistema sono i punti di intersezione tra la retta e la circonferenza.

## Metodo di risoluzione dell'angolo aggiunto

- Si considera:

$$a \sin x + b \cos x = r \sin(x + \alpha), \quad \text{con} \quad r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad \tan \alpha = \frac{b}{a}.$$

- Si sostituisce nell'equazione $a \sin x + b \cos x + c = 0$:

$$r \sin(x + \alpha) + c = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(x + \alpha) = -\frac{c}{r},$$

che è un'equazione elementare.

# Esercizi Svolti

# Esercizio 1: Risolvi $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**Soluzione:**

- $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ corrisponde a $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ oppure $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

## Esercizio 2: Risolvi $\cos x = -1$

**Soluzione:**

- $\cos x = -1$ è soddisfatta per $x = \pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

## Esercizio 3: Risolvi $\tan x = \sqrt{3}$

**Soluzione:**

- $\tan x = \sqrt{3}$ corrisponde a $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

# Esercizi da svolgere

# Esercizio 1

Risolvi l'equazione $\sin x = \frac{1}{2}$.

# Esercizio 2

Risolvi l'equazione $\cos x = 0$.

# Esercizio 3

Risolvi l'equazione $\tan x = -1$.

# Esercizio 4

Risolvi l'equazione $\sin 2x = 0$.

# Esercizi Avanzati

# Esercizio 5: Equazione combinata

Risolvi l'equazione $\sin x + \cos x = 1$.

# Esercizio 5: Equazione combinata

**Equazione:** Risolvi l'equazione $\sin x + \cos x = 1$.

**Svolgimento:**

- Elevo al quadrato entrambi i lati: $(\sin x + \cos x)^2 = 1^2$
- Ottengo: $\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1$
- Semplifico con l'identità $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$: $1 + 2\sin x \cos x = 1$
- Questo si riduce a $2\sin x \cos x = 0$, ovvero $\sin(2x) = 0$
- Risolvendo $\sin(2x) = 0$: $2x = k\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{k\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}$

Verifico le soluzioni:

- Per $x = 0$: $\sin(0) + \cos(0) = 1$, quindi $x = 0$ è una soluzione valida.
- Le altre soluzioni non soddisfano l'equazione originale.

**Soluzione:** $x = 0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

# Esercizio 6: Equazione con tangente

Risolvi l'equazione $\tan 2x = 1$.

# Compiti per casa

# Compiti per casa

## Esercizi da completare

- Risolvi $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Risolvi $\cos x = \frac{1}{2}$.
- Risolvi $\tan x = -\sqrt{3}$.