

Ripasso classi Terze: Equazioni Irrazionali

Esempi e schemi risolutivi

prof. Diego Fantinelli

September 18, 2024

Matematica per il Liceo Scientifico

Introduzione

La nascita delle equazioni irrazionali

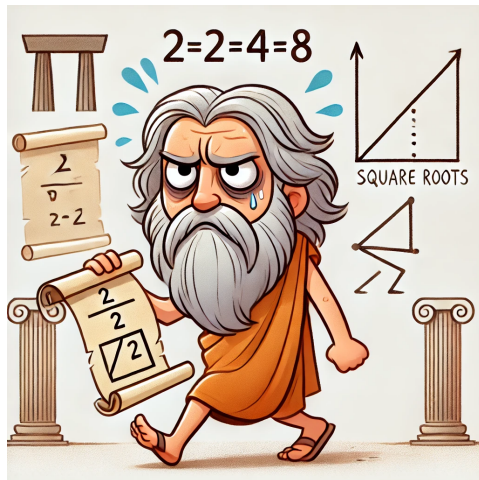
Storia e necessità delle equazioni irrazionali

- **Origini nel mondo greco:** Le equazioni irrazionali hanno le loro radici nel V secolo a.C., quando i matematici greci scoprirono che non tutte le lunghezze potevano essere espresse come rapporti di numeri interi.

Il problema della diagonale

- **Il problema della diagonale:**

La scoperta più famosa è attribuita alla scuola pitagorica, che si trovò di fronte all'impossibilità di esprimere la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1 come un numero razionale. Questo portò alla nascita del concetto di numeri irrazionali, poiché la diagonale misura $\sqrt{2}$.



La nascita delle equazioni irrazionali

- **Necessità di risolvere equazioni:** Con l'evolversi della geometria e delle misurazioni, sorse la necessità di risolvere equazioni che coinvolgessero radici quadrate, cubiche o di ordine superiore. Queste equazioni apparivano naturalmente nello studio di problemi geometrici e meccanici.
- **Equazioni moderne:** Nella matematica moderna, le equazioni irrazionali sono comunemente utilizzate in fisica, ingegneria e altre scienze, dove la necessità di descrivere fenomeni complessi richiede la risoluzione di espressioni che includono radici e potenze frazionarie.

Lo scooter nel pozzo

- Due amici, al rientro da scuola, transitano vicino ad un pozzo e decidono di mettere a frutto le loro conoscenze di fisica. Vogliono misurare la profondità del pozzo e si ricordano che il loro prof. di fisica a lezione: dovevano misurare il tempo t in cui un oggetto raggiunge il fondo. Mentre uno cerca qualcosa da lanciare l'altro butta di sotto lo scooter dell'amico! Un gran bel prank, un gran bel botto!



Il modello: Calcolo dell'altezza del pozzo

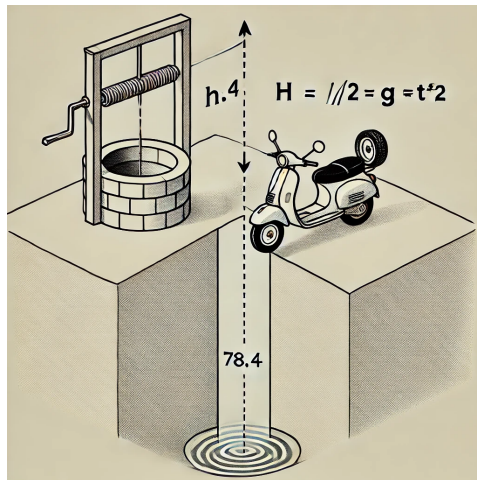
Procedimento:

- Usare la formula del moto uniformemente accelerato:

$$t = \sqrt{2gh} \Rightarrow h = \frac{1}{2}gt^2$$

- Dove $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ e $t = 4 \text{ s}$.
- Calcolare:

$$h = \frac{1}{2} \times 9.8 \times 4^2 = 78.4 \text{ m}$$



Esempi svolti

Esempio 1:

Risolvi l'equazione:

$$\sqrt{x+2} = x-1$$

Soluzione:

- Eleva al quadrato entrambi i lati:

$$x+2 = (x-1)^2$$

- Espandi e risolvi:

$$x+2 = x^2 - 2x + 1$$

- Riscrivi come:

$$x^2 - 3x - 1 = 0$$

- Risolvi con la formula quadratica:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Esempio 2:

Risolvi l'equazione:

$$\sqrt{2x - 1} = x - 2$$

Soluzione:

- Eleva al quadrato entrambi i lati:

$$2x - 1 = (x - 2)^2$$

- Espandi e risolvi:

$$2x - 1 = x^2 - 4x + 4$$

- Riscrivi come:

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

- Soluzione:

$$x = 5, \quad x = 1$$

Esempio 3:

Risolvi l'equazione: $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-1} = 1$

Soluzione:

- Isola uno dei radicali:

$$\sqrt{2x+3} = 1 + \sqrt{x-1}$$

- Eleva al quadrato entrambi i lati:

$$2x+3 = (1 + \sqrt{x-1})^2 = 1 + 2\sqrt{x-1} + (x-1)$$

- Semplifica:

$$2x+3 = x+2 + 2\sqrt{x-1}$$

- Isola il radicale:

$$2\sqrt{x-1} = x+2 - 2x - 3$$

$$2\sqrt{x-1} = -x-1$$

- Eleva nuovamente al quadrato:

$$4(x-1) = (x+1)^2$$

- Risolvi l'equazione risultante:

$$4x-4 = x^2 + 2x + 1$$

- Riordina e risolvi con la formula quadratica:

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

- Non esistono soluzioni reali.

Esempio 4: Equazione con parametri

Risolvi l'equazione:

$$\sqrt{x+a} = x-1$$

Soluzione:

- Eleva al quadrato entrambi i lati:

$$x+a = (x-1)^2$$

- Espandi e risolvi:

$$x+a = x^2 - 2x + 1$$

- Riordina:

$$x^2 - 3x + (1-a) = 0$$

- Usa la formula quadratica:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(1-a)}}{2}$$

- Determina le condizioni su a affinché l'equazione abbia soluzioni reali:

$$9 - 4(1-a) \geq 0$$

- Da cui segue:

$$a \leq 2$$

Esempio 5: Equazione con espressioni razionali

Risolvi l'equazione:

$$\frac{\sqrt{x}}{x-2} = 1$$

Soluzione:

- Moltiplica entrambi i lati per $(x-2)$:

$$\sqrt{x} = x - 2$$

- Eleva al quadrato entrambi i lati:

$$x = (x-2)^2$$

- Espandi:

$$x = x^2 - 4x + 4$$

- Riordina l'equazione:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

- Risolvi con la formula quadratica:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$$

- Soluzioni:

$$x = 4 \quad \text{oppure} \quad x = 1$$

- Verifica le soluzioni:

$$\frac{\sqrt{1}}{1-2} \neq 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \text{ non è soluzione valida.}$$

- Soluzione finale: $x = 4$

Due strategie risolutive

Esempio: Equazione irrazionale e condizioni di accettabilità

Risolviamo l'equazione: $\sqrt{2x} - \sqrt{x+7} = -1$ **1° passo:** Determiniamo le

condizioni di esistenza. Affinché i due radicali che compaiono nell'equazione siano definiti, i radicandi devono essere positivi o nulli. Quindi deve essere:

$$2x \geq 0 \quad \text{e} \quad x + 7 \geq 0$$

In altre parole, x deve soddisfare il sistema:

$$\begin{cases} 2x \geq 0 \\ x + 7 \geq 0 \end{cases}$$

che è verificato per $x \geq 0$.

Esempio: Condizione di concordanza di segno

Prima di elevare nuovamente al quadrato, dobbiamo porre la condizione di concordanza di segno:

$$6 - x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 6$$

$$(2\sqrt{2x})^2 = (6 - x)^2 \quad \text{Elevando al quadrato i due membri}$$

$$8x = 36 + x^2 - 12x \quad \text{Svolgendo i calcoli}$$

$$x^2 - 20x + 36 = 0 \quad \text{Riscrivendo in forma normale}$$

$$x = 10 \pm \sqrt{64} = \begin{cases} 2 \\ 18 \end{cases} \quad \text{Formula ridotta}$$

Esempio: Verifica delle condizioni di accettabilità

3° passo: Affinché una soluzione sia accettabile, deve soddisfare la condizione di esistenza e la condizione di concordanza di segno.

Quindi deve soddisfare il sistema:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x \leq 6$$

La soluzione $x = 2$ appartiene all'intervallo $0 \leq x \leq 6$, quindi è accettabile; la soluzione $x = 18$, invece, non appartiene a tale intervallo, quindi è da scartare. **4°**

passo: In conclusione, l'insieme delle soluzioni dell'equazione data è $S = \{2\}$.

Esercizi proposti

Equazioni irrazionali (Base)

- Risolvi $\sqrt{x+3} = x-2$
- Risolvi $\sqrt{4x+1} = 2x-1$
- Risolvi $\sqrt{2x-1} = x-3$
- Risolvi $\sqrt{5x+2} = 2x-4$

Equazioni irrazionali (Avanzato)

- Risolvi $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x-3} = 4$
- Risolvi $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 2$
- Risolvi $\sqrt{3x+5} + \sqrt{x-2} = 5$
- Risolvi $\sqrt{4x+9} = \sqrt{3x+2} + 1$

Equazioni irrazionali (livello Super Sayan)

esercizi proposti

- $\sqrt{3x+5} + \sqrt{2x-1} = x+1$
- $\frac{\sqrt{2x+3}}{x-1} = 1$
- $\sqrt{x^2+4x+5} - \sqrt{x+1} = 1$